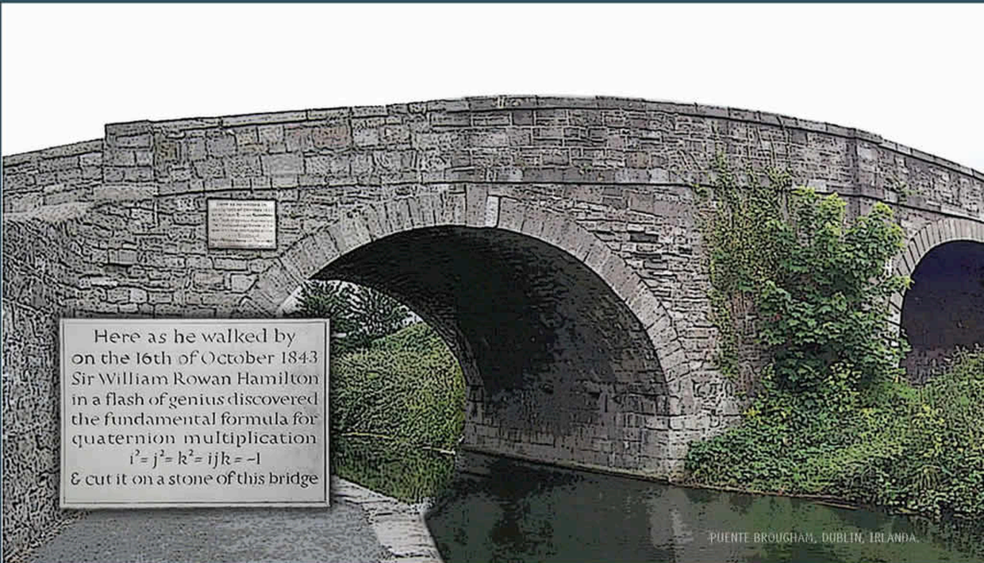
¿Por qué R^3 no admite estructura de cuerpo, pero R^4 sí?

- CUATERNIONES -



José Fernando Isaza Delgado

Universidad de Bogotá
Jorge Tadeo Lozano

¿POR QUÉ R^3 NO ADMITE ESTRUCTURA DE CUERPO PERO R^4 SÍ?

— Cuaterniones —

JOSÉ FERNANDO ISAZA DELGADO

Universidad de Bogotá
JORGE TADEO LOZANO

Índice

¿Por qué $\mathbb{R}^3$ no admite estructura de cuerpo pero $\mathbb{R}^4$ sí? -Cuaterniones-

José Fernando Isaza D.*

Resumen

En este trabajo se presenta una demostración elemental de la imposibilidad de dotar a $\mathbb{R}^3$ con una estructura de cuerpo basada en unas notas de Dieudonné y se analizan las propiedades del cuerpo no conmutativo de los cuaterniones, para concluir con su aplicación en la descripción de rotaciones en $\mathbb{R}^3$.

*Universidad Jorge Tadeo Lozano, Bogotá. E-mail: jfisaza@utadeo.edu.co

Introducción

Estas notas tratan dos temas complementarios: el primero es una demostración elemental de la imposibilidad de dotar a $\mathbb{R}^3$ de una estructura de cuerpo. La presentación está orientada por la demostración de Dieudonné (1964,1971), que es un caso particular del siguiente Teorema de Frobenius: "Sea D un anillo de división algebráico sobre F, el cuerpo de los números reales. Entonces D es isomorfo al cuerpo de los números reales, al cuerpo de los números complejos, o al anillo de división de los cuaterniones reales".

El segundo tema presenta las propiedades del cuerpo no conmutativo (anillo de división) de los cuaterniones, en particular se muestra su aplicación a las rotaciones en $\mathbb{R}^3$.

El acápite 0 es un repaso de las definiciones de grupo, anillo, dominio entero, anillo de división y cuerpo.

0. Conceptos básicos

0.1. Grupo

Sea $G \neq \emptyset$. El conjunto G de elementos es un grupo si admite una operación binaria $(\cdot)$ tal que:

1. Si $a \in G$, $b \in G$ entonces $a \cdot b \in G$ (cerrada).

2. Si $a, b, c \in G$ entonces $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (asociatividad).

3. Existe un elemento $e \in G$, tal que para todo $a \in G$, $a \cdot e = e \cdot a = a$ (existencia del elemento identidad, o elemento unitario).

4. Para todo $a \in G$, existe un elemento $a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ (existencia del elemento inverso).

EJEMPLOS. El conjunto de los números enteros con la operación $+$ es un grupo. El conjunto $M(n, n)$

de las matrices cuadradas de orden n es un grupo para la operación $+$, definida así

$$A = (a_{i,j}) \in M(n,n), \qquad B = (b_{i,j}) \in M(n,n),$$

$$A + B = C \qquad C = (c_{ij}), \qquad c_{ij} = (a_{i,j} + b_{i,j}).$$

El conjunto Q^* de los números racionales, excluido el 0, es un grupo con la operación multiplicación.

0.2. Anillo

Un conjunto $A \neq \emptyset$ se denomina anillo si admite dos operaciones binarias $(+, \cdot)$ con las siguientes propiedades:

1. A con la operación $+$ es un grupo.
2. La operación $\cdot$ es asociativa, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ para $a, b, c \in A$.
3. La operación $\cdot$ es distributiva con respecto a $+$

   $$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \text{ para } a, b, c \in A.$$

0.2.1. Anillo con elemento unidad

Si existe $I \in A$ tal que $a \cdot I = I \cdot a = a$, para $a \in A$, se dice que A es un anillo con elemento unidad.

Sea M el conjunto de las matrices cuadradas $M(n, n)$, con la operación suma definida atrás y con la operación multiplicación definida así:

$$\text{Si} \qquad A = a_{ij}, \qquad B = (b_{ij}), \qquad C = A \cdot B,$$

$$C = (c_{ij}), \qquad c_{ij} = \sum_{k=i}^{n} a_{ik} b_{kj} \, .$$

El elemento unitario es $I = (\delta_{ij})$ en donde $\delta_{ij} = 1$, si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$, si $i \neq j$. $M(n, n)$ es un anillo con elemento unidad.

0.3. Dominio Entero

Llamando 0 el elemento identidad para la operación $+$, si un anillo A tiene la propiedad de cancelación, es decir $a, b, c \in A$ con $c \neq 0$, si $a \cdot c = b \cdot c$ implica $a = b$. Se dice que A es un dominio entero.

0.4. Cuerpo

Sea un dominio entero K tal que, si $a \neq 0$, existe a^{-1} (inverso multiplicativo):

$$aa^{-1} = 1 = a^{-1}a.$$

Algunos autores exigen que las operaciones $+$ y $\cdot$ sean conmutativas para que K sea un cuerpo. Si no se cumple esta condición denominan K como anillo de división.

Los números racionales con las operaciones usuales $(+, \cdot)$ tienen estructura de cuerpo.

Los números reales con las operaciones usuales $(+, \cdot)$ tienen estructura de cuerpo.

Los números algebráicos, es decir los que son solución de algún polinomio con coeficientes racionales, tienen estructura de cuerpo. Para una demostración de esta propiedad ver Herstein (1960), página 172.

Los números trascendentes, es decir los que no son solución de ningún polinomio de coeficientes racionales no forman un cuerpo. Basta mostrar que 1 no es un número trascendente. Tampoco se tiene la propiedad clausurativa: π es trascendente, $1/\pi$ es trascendente, pero $\pi \cdot (1/\pi)$ no es trascendente.

Un ejemplo menos trivial es el siguiente:

$$\text{llamando} \quad a \sim b \quad \text{sii} \quad a \equiv b \pmod p \quad \text{si} \quad p|a-b$$

las clases de equivalencia de esta relación $[0] \ldots [p-1]$, con las operaciones $+$ y $\cdot$ definidas así: $[a][b] = [ab]$, $[a]+[b] = [a+b]$. Si p es un número primo, p tiene estructura de cuerpo. El inverso aditivo de $[a]$ es $[p-a]$. Para demostrar que para cualquier $[a]$ existe el inverso multiplicativo, se procede así: a y p son primos relativos, entonces existen enteros m,n tales que

$$ma + np = 1, \quad \text{es fácil ver que} \qquad [m] = [a]^{-1},$$

en efecto

$$[ma] = [1 - np] = [1].$$

pues $p|1-(1-np)$.

El anillo A de las matrices $M(n, n)$, no es un dominio entero. No se tiene la propiedad conmutativa. Un contraejemplo elemental es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B = A \cdot C$, $A \neq 0$ pero $B \neq C$.

El conjunto de las matrices cuadradas $M(n, n)$ no tiene estructura de cuerpo con la operación $(+\cdot)$. En efecto si $A \in M(n, n)$, $A \neq 0$ pero $detA = 0$, no existe A^{-1}. El teorema de Frobenius muestra que, si $n \geqslant 3$, no es posible definir operaciones $+$ y $\cdot$ que le confieran estructura de grupo a $M(n, n)$.

1. Estructuras algebráicas en $\mathbb{R}^3$

Es natural preguntarse: dado que $\mathbb{R}^2$ admite una estructura de cuerpo conmutativo $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$, ¿es posible definir en $\mathbb{R}^3$ una estructura de cuerpo? Por supuesto que el teorema de Frobenius niega esta posibilidad. Sin embargo, no pocos estudiantes de física o ingeniería, que no tienen por qué conocer el teorema de Frobenius, pueden pensar que modificando las definiciones de producto punto o cruz sería posible dotar a $\mathbb{R}^3$ de una estructura de cuerpo.

Con la operación $+$, $\mathbb{R}^3$ admite estructura de grupo

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3).$$

El producto punto en $\mathbb{R}^3$ no cumple la propiedad de dominio entero, basta considerar dos vectores colineales B y C, $B \neq C$, A perpendicular a B y C $A \neq 0$, $A \cdot B = A \cdot C$ pero $B \neq C$. Más sencillo: no existe un elemento unidad I tal que $B \cdot I = B$, basta observar que $B \cdot I \in \mathbb{R}$, pero $B \in \mathbb{R}^3$.

En el producto $\times$, no es posible definir un vector unitario para la multiplicación $A \times I \neq A$ si $A \neq 0$.

A continuación se presenta una demostración de la imposibilidad de dotar a $\mathbb{R}^3$ de estructura de cuerpo. El teorema está basado en Dieudonné (1964,1971).

1.1. $\mathbb{R}^3$ no admite estructura de cuerpo

Razonando por el absurdo. Suponemos que $\mathbb{R}^3$ admite estructura de cuerpo (conmutativo o no) y sea e_0 el elemento unitario para la operación multiplicación, $e_0 \neq 0$. Se elige un $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $x \neq \lambda e_0$, en donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

El conjunto $\{e_0, x, x^2, x^3\}$ x^2, (x^3 existen pues se asume que $\mathbb{R}^3$ es un cuerpo) es linealmente dependiente, por lo tanto existen escalares reales α, β, γ y δ, no todos cero, tal que

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta e_0 = 0.$$

α y β no pueden ser ambos cero simultaneamente, pues se tendría:

$$\gamma x + \delta e_0 = 0$$

Con $\gamma \neq 0$ pues si $\gamma = 0$ entonces $\delta e_0 = 0$ y $\delta = 0$, contrario a la hipótesis que no todos los escalares α, β, γ y δ son cero. De $\gamma x + \delta e_0 = 0$ se deduce $x = -\gamma^{-1}\delta e_0$, contrario a la hipótesis que $x \neq \lambda e_0$.

Como α y β no son ambos cero, supongamos que $\alpha \neq 0$.

La ecuación $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta e_0 = 0$ puede escribirse

$$(x - \sigma e_0)(x^2 + \mu x + \nu e_0) = 0.$$

Como $x - \sigma e_0 \neq 0$, entonces

$$x^2 + \mu x + \nu e_0 = 0. \tag{1}$$

Por medio de la factorización cuadrática en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con campo escalar $\mathbb{R}$ se tiene que:

$$\mu^2 - 4\nu < 0$$

en caso contrario $x^2 + \mu x + \nu e_0 = 0$ podría escribirse

$$(x - \sigma_1 e_0)(x - \sigma_2 e_0) = 0,$$

pero $x - \sigma_1 e_0 \neq 0$ $x - \sigma_2 e_0 \neq 0$.

La ecuación 1 puede escribirse

$$\left(x + \frac{\mu}{2} e_0\right)^2 = \left(\frac{\mu^2}{4} - \nu\right) e_0.$$

Definiendo

$$\chi' = \omega' \left(x + \frac{\mu}{2} e_0\right),$$

en donde

$$\omega^2 = \nu - \frac{\mu^2}{4},$$

notar que $\omega^2 \neq 0$ $\omega^2 > 0$. Se obtiene

$$(\chi')^2 = -e_0.$$

con σ, μ, ν reales.

Sea $\{e_0, e_1, e_2\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ luego e_0, e_1, e_1^2, e_1^3 son linealmente dependientes y con un proceso similar se obtiene

$$e_1^2 = -e_0 \quad \text{y} \quad e_2^2 = -e_0.$$

$e_1 \cdot e_2 \in \mathbb{R}^3$, se puede escribir en función de los elementos de la base:

$$e_1 \cdot e_2 = \sigma_0 e_0 + \sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2. \tag{2}$$

Multiplicando a la derecha por e_2 se obtiene

$$-e_1 = \sigma_0 e_2 + \sigma_1 e_1 \cdot e_2 - \sigma_2 e_0.$$

Reemplazando $e_1 \cdot e_2$ por (2) se deduce

$$(\sigma_0 - \sigma_1\sigma_2)e_0 - (1 + \sigma_1^2)e_1 - (\sigma_0 + \sigma_1\sigma_2)e_2 = 0.$$

Como e_0, e_1, e_2 forman una base $1 + \sigma_1^2 = 0$, lo que es una contradicción pues $\sigma_1 \in \mathbb{R}$.

El caso $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$ conduce a $\beta x^2 + \gamma x + \delta e_0 = 0$, reduciéndose al caso anterior. Por lo tanto $\mathbb{R}^3$ no admite estructura de cuerpo.

2. Cuaterniones

2.1. Elementos históricos

$\mathbb{R}^4$ admite una estructura de cuerpo no conmutativo. Con esta estructura, $\mathbb{R}^4$ forma el cuerpo de los cuaterniones de Hamilton, nombre dado en honor a su descubridor: Sir William Rowan Hamilton (1805-1865).

Hamilton es bien conocido por sus trabajos de física teórica, el operador de energía justamente llamado Hamiltoniano permite una generalización de la mecánica newtoniana que simplifica la formulación de las ecuaciones de movimiento en sistemas no inerciales.

En el siglo XX, la formulación de la mecánica cuántica se basó en la ecuación $H|\psi >= E|\psi >$ en donde H es el Hamiltoniano y el ket $|\psi >$ da origen a la función de onda.

Durante la juventud Hamilton trabajó en el sistema de números imaginarios, se le atribuye la construcción del cuerpo de números complejos $\mathbb{C}$, que admite a $\mathbb{R}$ como subcuerpo. Como es natural estuvo buscando una estructura de cuerpo en $\mathbb{R}^3$.

La demostración de que esto es imposible fue publicada por Frobenius 12 años después de la muerte de Hamilton. La leyenda cuenta que al regresar a la casa, sus hijos le preguntaban ¿papá ya puedes multiplicar ternas?

Las crónicas narran que en 1843 caminando por el puente Brougham, en Dublin, Hamilton tuvo un episodio de $serendipity$: intuyó que en $\mathbb{R}^3$ no había una estructura de cuerpo, pero sí en $\mathbb{R}^4$, en este caso había 3 unidades imaginarias i,j y k que cumplieran las siguientes relaciones:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$ij = k \qquad ji = -k.$$

Se cuenta que Hamilton esculpió con una navaja en el puente las anteriores relaciones. Por supuesto no hay vestigios de este hecho, aunque sí existe una placa conmemorativa con esas ecuaciones en Brougham.

En la segunda mitad del siglo XIX, los cuaterniones tuvieron amplia difusión, por sus aplicaciones a la mecánica, en particular por su sencillez para la representación de las rotaciones en $\mathbb{R}^3$. En Argentina se editó un extenso libro sobre la aplicación de los cuaterniones a la mecánica clásica (Balbin, 1887).
La importancia de los cuaterniones fue disminuyendo

en el siglo XX; el álgebra de matrices fue tomando su lugar. Sin embargo en las últimas décadas hay un renovado interés por los cuaterniones, pues permiten una formulación más simple de la física relativista y una más adecuada representación de la composición de rotaciones (Girard, 2007).

2.2. Álgebra de cuaterniones

Llamando $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$, la base estándar $\mathbb{R}^4$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ es:

$$\begin{aligned} 1 &= (1,0,0,0) \\ i &= (0,1,0,0) \\ j &= (0,0,1,0) \\ k &= (0,0,0,1). \end{aligned}$$

Si $q \in \mathbb{H}$,

$$q = \alpha + \vec{v}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \qquad \vec{v} \in \mathbb{R}^3.$$

La suma y el producto por escalar se definen naturalmente

$$(\alpha_1 + \vec{v}_1) + (\alpha_2 + \vec{v}_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$
$$\lambda(\alpha + \vec{v}) = \lambda\alpha + \lambda\vec{v}.$$

Para definir el producto se parte de las relaciones

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$ij = k,$$

de las cuales se deducen las siguientes propiedades:

$$ijk = -1 \qquad ki = -ik = j \qquad jk = -kj = i.$$

Como $\mathbb{H}$ debe tener propiedades asociativas y distributivas, llamando

$$q_1 = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 + k\alpha_3),$$
$$q_2 = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\beta_0 + i\beta_1 + j\beta_2 + k\beta_3),$$

se tiene

$$
\begin{aligned}
q_1q_2 = (&\alpha_0\beta_0 - \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3) \\
&+ (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_3)i \\
&+ (\alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3)j \\
&+ (\alpha_0\beta_3 + \alpha_3\beta_0 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2 k\beta_1)k.
\end{aligned}
$$

Para el producto de cuaterniones no se utiliza un símbolo entre los factores. Llamando

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \alpha + \vec{v} \qquad \vec{v} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\
q_2 &= \beta + \vec{w} \qquad \vec{w} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)
\end{aligned}
$$

q_1q_2 puede expresarse así:

$$
(\alpha_0+\vec{v})(\beta_0+\vec{w}) = (\alpha_0\beta_0-\vec{v}\cdot\vec{w}+(\alpha_0\vec{w}+\beta_0\vec{v}+\vec{v}\times\vec{w}),
$$

donde $\vec{v} \cdot \vec{w}$ es el producto escalar canónico y $\vec{v} \times \vec{w}$ es el producto vectorial canónico.

La presencia de $\vec{v} \times \vec{w}$ muestra que la multiplicación no es conmutativa, tampoco es necesariamente anticonmutativa (a menos que la parte vectorial de uno de ellos sea cero), es decir

$$q_1 q_2 \neq q_2 q_1 \qquad pero \qquad q_1 q_2 \neq -q_2 q_1.$$

Es sencillo, pero tedioso, demostrar que $\mathbb{H}$ con las operaciones $+$ y multiplicación forma un anillo.

$$\text{Si} \quad q = \alpha + \vec{v} \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3),$$

se define $||q||^2 = \alpha^2 + {v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2$. El conjugado de q es $\overline{q} = \alpha - \vec{v}$

$$\begin{aligned} q\overline{q} &= (\alpha + \vec{v})(\alpha - \vec{v}) \\ &= (\alpha^2 + \vec{v} \cdot \vec{v}) \\ &+ (\alpha\vec{v} - \alpha\vec{v}\vec{v} \times \vec{v}) \\ &= ||q||^2. \end{aligned}$$

Si $q \neq 0$ se define $q^{-1} = \dfrac{\overline{q}}{||q||^2}$, q^{-1} tiene las propiedades del inverso multiplicativo. Comprobándose que $\mathbb{H}$ es un cuerpo no conmutativo.

2.3. Algunas propiedades

$$\vec{v}\vec{w} = (-\vec{v} \cdot \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w}),$$

$$\begin{aligned}
\overline{pq} &= \overline{q}\overline{p}, \\
p &= (\alpha + \vec{v}), \;\; q = (\beta + \vec{w}), \\
\overline{qp} &= (\alpha\beta - \vec{v} \cdot \vec{w}) - (\alpha\vec{w} + \beta\vec{v} + \vec{v} \times \vec{w}), \\
\overline{q}\overline{p} &= (\beta - \vec{w})(\alpha - \vec{v}) \\
&= (\alpha\beta - \vec{v} \cdot \vec{w}) + (-\alpha\vec{w} + -\beta\vec{v} + \vec{v} \times \vec{w}) \\
&= (\alpha\beta - \vec{v} \cdot \vec{w}) - (\alpha\vec{w} + \beta\vec{v} + \vec{v} \times \vec{w}), \\
||pq||^2 &= pq\overline{pq} = pq\bar{q}\bar{p} \\
&= p||q||^2\overline{p} = ||q||^2||p||^2.
\end{aligned}$$

En una esfera $S^3 = \{q \in H \mid ||q|| = 1\}$, todo punto con parte real nula satisface la ecuacion $q^2 = -1$. En efecto si $q = \vec{v}$, entonces

$$q^2 = \vec{v}\vec{v} = -\vec{v}\cdot\vec{v} + \vec{v}\times\vec{v} = -({v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2).$$

Pero $\vec{v} \in S^3, \quad ||\vec{v}||^2 = 1, \quad {v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2 = 1,$ de donde $q^2 = -1$.

Si $u \in S^3$, definimos $T_u(q) = uq\overline{u}$. (Hilden, 2009).

1. T_u es una isometría

$$\begin{aligned} ||uq\overline{u}|| &= ||u||\,||q\overline{u}|| = ||u||\,||q||\,||\overline{u}|| \\ &= ||q||\,||u||\,||\overline{u}|| \\ &= ||q||\,||u\overline{u}|| \\ &= ||q||\,||u||^2 \\ &= ||q||. \end{aligned}$$

2. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $T_u(\alpha) = \alpha$

$$T_u(\alpha) = u\alpha\overline{u} = \alpha u\overline{u} = \alpha.$$

3. $T_u(\vec{v}) \in$ Imaginario de H. Si $u = \alpha + \vec{w}$,

$$T_u(\vec{v}) = \alpha\vec{v} \times \vec{w} + (\vec{w} \times \vec{v}) \times \vec{w},$$

es decir su parte real es 0.

4. Si $u = \alpha + \vec{v}$,

$$T_u(\vec{v}) = (\alpha + \vec{v})\vec{v}(\alpha - \vec{v}).$$

Es fácil ver que $\vec{v}(\alpha - \vec{v}) = (\alpha - \vec{v})\vec{v}$,

$$T_u(\vec{v}) = (\alpha + \vec{v})(\alpha - \vec{v})\vec{v} = u\,\overline{u}\,\vec{v} = \vec{v}.$$

Calculamos T_u,

$$u \in S^3, \quad u = \alpha + \vec{v},$$

$$1 = ||u||^2 = \alpha^2 + ||v||^2,$$

$$\alpha = \cos\theta, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \qquad -1 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

$$||v||^2 = 1 - \alpha^2 = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta,$$

$$||v|| = \sin\theta,$$

$$T_u(\vec{v}) = (\alpha + \vec{v})\vec{v}(\alpha - \vec{v}) = \frac{(\alpha + \vec{v})\vec{v}(\alpha - \vec{v})}{||u||^2}\vec{v},$$

$$T_u(\vec{v}) = \vec{v}.$$

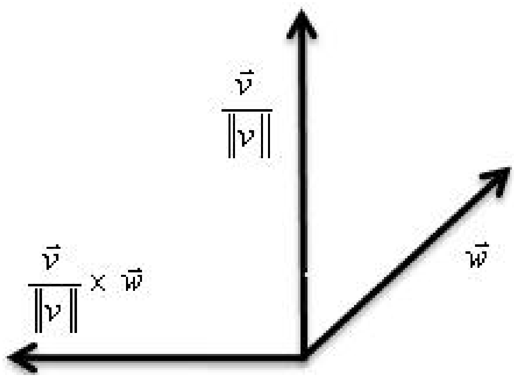
5. Supongamos $\vec{w} \perp \vec{v}$

$$\begin{aligned} T_u(\vec{w}) &= (\alpha + \vec{v})\vec{w}(\alpha - \vec{v}) \\ &= \alpha^2\vec{w} + \alpha(\vec{v}\vec{w} - \vec{w}\vec{v}) - \vec{v}\vec{w}\vec{v}, \end{aligned}$$

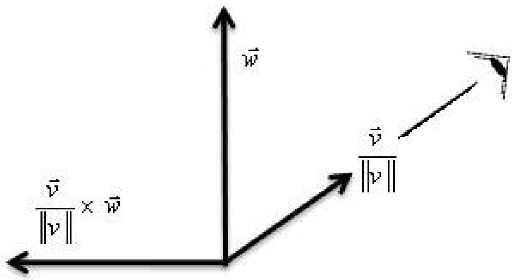
$$\vec{v}\vec{w} = \vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v} = -\vec{w}\vec{v},$$

$$\begin{aligned} T_u(\vec{w}) &= \alpha^2\vec{w} + 2\alpha\vec{v}\vec{w} + \vec{v}\vec{v}\vec{w} \\ &= \alpha^2\vec{w} + 2\alpha||\vec{v}||\left(\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}\vec{w}\right)||\vec{v}||^2\vec{w} \\ &= \left(\alpha^2 - ||\vec{v}||^2\right)\,\vec{w} + 2\alpha||\vec{v}||\left(\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} \times \vec{w}\right) \\ &= (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\vec{w} \\ &+ 2\cos\theta\sin\theta\left(\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} \times \vec{w}\right) \\ &= \cos(2\theta)\vec{w} + \sin(2\theta)\left(\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} \times \vec{w}\right), \end{aligned}$$

$$T_u(\vec{v}) = \vec{v},$$
$$T_u(\vec{w}) = \cos(2\theta)\vec{w} + \sin(2\theta)\left(\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} \times \vec{w}\right).$$



T_u es una rotación por 2θ, con eje $\lambda\vec{v}$. Contra reloj al ojo en punto A.



3. Ejemplo, grupo de simetrías de un tetrahedro

Seguimos a (Hilden, 2009). ¿Cuál es la rotación de 120^{o} contrarreloj del punto de vista de una persona a A seguido por una rotación de 180^{o} en el eje y?

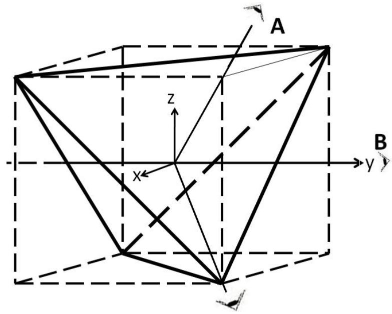


Figura 1: Tomado de Hilden, 2009.

A:

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= \lambda(i + j + k),\\
2\theta &= 120^{\mathrm{o}},\\
\theta &= 60^{\mathrm{o}},\\
\alpha &= \cos\theta = \frac{1}{2},\\
\mu &= \frac{1}{2} + \lambda(i + j + k),\\
1 &= \|\mu\|^2 = \frac{1}{4} + \lambda^2 3\\
\lambda^2 &= \frac{1}{4}, \qquad \lambda = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

B:

$$\vec{v} = \lambda j,$$

$$2\theta = 180^{\text{o}},$$

$$\theta = 90^{\text{o}},$$

$$\alpha = \cos\theta = 0,$$

$$\mu = \lambda j,$$

$$1 = \|\mu\| \Rightarrow \lambda = 1,$$

$$\mu_1 \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(i + j + k), \qquad \mu_2 = j,$$

$$\begin{aligned} \mu_2\mu_1 &= j(\frac{1}{2}(i + j + k)) \\ &= \frac{1}{2}(j - k - 1 + i) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(i + j - k), \end{aligned}$$

$$\text{eje} = i + j - k$$

$$\cos\theta = \frac{-1}{2},$$
$$\theta = 120^{\text{o}},$$
$$2\theta = 240^{\text{o}}.$$

4. Forma Polar

Seguimos a Girard, 2007. Si $q = \alpha + \vec{v} = \alpha + \nu_1\vec{i} + \nu_2\vec{j} + \nu_3\vec{k}$, se define $q = r(\cos\theta + \vec{\mu}\sin\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, en donde

$$r = ||q|| = (\alpha^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2)^{\frac{1}{2}},$$
$$\cos\theta = \pm\frac{\alpha}{r}, \qquad \sin\theta = \pm\frac{\sqrt{\alpha^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2}}{r}.$$

$\vec{\mu}$ es un vector unitario $\vec{\mu}\vec{\mu_c} = +1$ (no confundir con el producto escalar $\vec{\mu} \cdot \vec{\mu_c} = -1$),

$$\vec{\mu} = \frac{\pm(\nu_1\vec{i} + \nu_2\vec{j} + \nu_3\vec{k})}{\sqrt{\alpha^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2}}, \qquad \text{si} \qquad \vec{\nu} \neq 0.$$

Si $q = r(\cos\theta + \vec{\mu}\sin\theta)$, por inducción matemática se demuestra

$$q^n = r^n(\cos n\theta + \vec{\mu}\sin n\theta),$$

$$\begin{aligned} q^n q &= r^n\,(\cos n\theta + \vec{\mu}\sin n\theta) r(\cos\theta + \vec{\mu}\sin\theta) \\ &= r^n(\cos n\theta\cos\theta - \vec{\mu}\cdot\vec{\mu}\sin n\theta\sin\theta \\ &\quad + \vec{\mu}\cos n\theta\sin\theta) \\ &\quad + \vec{\mu}\sin n\theta\sin\theta + \vec{\mu}\times\vec{\mu}\sin n\theta\sin\theta \\ &= r^n(\cos(n+1)\theta + \vec{\mu}\sin(n+1)\theta). \end{aligned}$$

Si $n \in \mathbb{N}$, $q = r(\cos\theta + \vec{\mu}\sin\theta)$, se tiene

$$q^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta}{r} + \vec{\mu}\sin\frac{\theta}{r}\right).$$

En efecto

$$q^{1/n} = R(\cos\varphi + \vec{v}\sin\varphi) \tag{3}$$

$$\begin{aligned} (q^{1/n})^n &= R^n(\cos n\varphi + \vec{v}\sin n\varphi \\ &= r(\cos\theta + \vec{\mu}\sin\theta), \end{aligned}$$

de donde $R = r^{1/n}$, $\varphi = \frac{\theta+2\pi k}{n}$, $\vec{\mu} = \vec{v}$

Si $q = \alpha + \vec{v}$, se define

$$\exp(q) = \exp(a)\left(\cos||\vec{v}|| + \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}\sin||\vec{v}||\right)$$
$$\ln(q) = \ln||q|| + \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}\arccos\left(\frac{a}{||q||}\right).$$

Sea Z_0 una solución de la ecuación polinómica

$$\sum_{n=0}^{N} a_n Z^n = 0, \qquad a_n \in \mathbb{R}$$

Si $Z_0 \in \mathbb{R}$, existen infinitos cuaterniones que no conmutan con Z_0. Sea q un cuaternión que no conmuta con Z_0, entonces qZ_0q^{-1} es también solución. En efecto de

$$(qZ_0q^{-1})^n = qZ_0^n q^{-1} \tag{4}$$

se tiene

$$\sum_{n=0}^{N} a_n (qZ_0q^{-1})^n = \sum_{n=0}^{N} a_n q Z_0^n q^{-1}$$

como $a_n \in \mathbb{R}$ conmuta con $q \in \mathbb{H}$ se tiene

$$\sum_{n=0}^{N} a_n(qZ_0q^{-1})^n = q\left(\sum_{n=0}^{N} a_n Z_0^n\right)q^{-1} = 0$$

Un polinomio que tiene una solución no real tiene en $\mathbb{H}$ infinitas soluciones.

5. Rotaciones

Considérese un eje de rotación l que pasa por el origen del sistema de coordenadas. Llamando

$$\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$$

un vector unitario del eje l, si un punto $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ gira un ángulo θ alrededor del eje l (θ es medido en la dirección de μ con la convención de la mano derecha). Las coordenadas $x' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ del punto después del giro están dadas por la matriz de rotación A (Girard, 2007).

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad x' = \begin{bmatrix} 0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1^2 + \\ (u_2^2 + u_3^2)\cos\theta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} u_1 u_2 (1 - \cos\theta) \\ -u_3 \sin\theta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} u_1 u_3 (1 - cos\theta) \\ +u_2 \sin\theta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u_1 u_2 (1 - \cos\theta) \\ +u_3 \sin\theta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} u_2^2 + \\ (u_1^2 + u_3^2)\cos\theta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} u_2 u_3 (1 - cos\theta) \\ -u_1 \sin\theta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u_1 u_3 (1 - cos\theta) \\ -u_2 \sin\theta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} u_2 u_3 (1 - cos\theta) \\ +u_1 \sin\theta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} u_3^2 + \\ (u_1^2 + u_2^2)\cos\theta \end{pmatrix} \end{bmatrix}.$$

Una deducción de esta matriz se encuentra en Rao, 1988.

El empleo de los cuaterniones simplifica la formulación de la rotación, llamando

$$r = \left(\cos\frac{\theta}{2} + \vec{\mu}\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

Las coordenas x' están dadas por la relación

$$\vec{x}' = \left(\cos\frac{\theta}{2} + \vec{\mu}\sin\frac{\theta}{2}\right)\vec{x}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \vec{\mu}\sin\frac{\theta}{2}\right) \quad (5)$$

$$= r\vec{x}r_c. \quad (6)$$

Para obtener una expresión explícita de la ecuación 5 son útiles las siguientes expresiones de multiplicación de cuaterniones y de productos vectoriales.
Si A y B son cuaterniones puros, es decir con componente real nula, se tiene

$$AB = -\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \times \vec{B},$$

$$A = (0, \vec{A}) \qquad \text{y} \qquad B = (0, \vec{B}),$$

$$(\vec{\mu} \times \vec{x}) \times \vec{\mu} = \vec{x} - (\vec{\mu} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{\mu}). \tag{7}$$

Combinando 5 y 7 se obtiene

$$\begin{aligned}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \vec{\mu}\sin\frac{\theta}{2}\right)\vec{x} = &-\vec{\mu} \cdot \vec{x}\sin\frac{\theta}{2} \\ &+ \vec{x}\cos\frac{\theta}{2} \\ &+ \vec{\mu} \times \vec{x}\sin\frac{\theta}{2},\end{aligned}$$

$$\left(\cos\frac{\theta}{2}+\vec{\mu}\sin\frac{\theta}{2}\right)\vec{x}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\vec{\mu}\sin\frac{\theta}{2}\right)=\cos^2\frac{\theta}{2}\vec{x}$$
$$+\sin^2\frac{\theta}{2}[(\vec{\mu}\cdot\vec{x})\mu]+\vec{\mu}\times\vec{x}\sin\theta,$$

se obtiene la fórmula clásica (Girard, 2007)

$$\vec{x}'=\vec{x}\cos\theta+\vec{\mu}(\vec{\mu}\cdot\vec{x})(1-\cos\theta)+\vec{\mu}\times\vec{x}\sin\theta.$$

Bibliografía

- Balbin, V. “Elementos de Cálculo de los cuaterniones”, Imprenta M. Biedma, Buenos Aires, 1887.
- Dieudonné, Jean. “Algèbre linéaire et géométrie élémentaire”, Hermann Paris, 1964.
- Peaget, Jean. $et.a.l$ “La enseñanza de las Matemáticas”, Aguilar, 1971.
- Girard, Patrick. “Quaternions, Clifford Algebras and Relativistic Physics”, Birkhauser Verlag, 2007.

- Herstein, I.N. “Topics in Algebra”, Blaisdell Publis Hang Company, 1964.

- Hilden, Mike. “Algebraic Number Theory and its Aplications to Geometry”, Congreso Colombiano de Matemáticas Univalle, 2009.

- Srinivas, Rao. “The Rotation and Lorentez Groups and their Representations for Physicists”, John Wiley and Sons, 1988.

ISBN: 978-958-725-052-7
9 789587 250527

UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ JORGE TADEO LOZANO 1954

www.utadeo.edu.co